

协调与非协调元在板弯曲问题中的 数值模拟及应用*

李哲, 吴帮民[†], 杨泽琨

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 板问题的研究对于理解平板结构的承载、变形、稳定性及振动行为具有重要意义。在数学上,这类问题通常可归结为重调和方程的求解。本文分别在矩形和三角形网格上,采用协调元与非协调元对固支板与简支板两类模型进行数值模拟。所用协调元包括Bogner-Fox-Schmit元(BFS元)与Argyris元,非协调元包括Adini元与Morley元。数值实验表明,这些单元均可达到理论上的最优误差收敛阶。最后,将所述算法成功应用于一个实际板问题,取得了准确的模拟结果。

关键词: 板问题;重调和方程;协调元;非协调元;数值模拟

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2025.12.10.0001

中图分类号: O242.1;O342 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2026)02-0223-015

引文格式: 李哲,吴帮民,杨泽琨. 协调与非协调元在板弯曲问题中的数值模拟及应用[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文),2026,43(2):223-237.

英文引文格式: Li Zhe, Wu Bangmin, Yang Zekun. Numerical simulation and applications of conforming and non-conforming finite elements in plate bending problems [J]. Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition in Chinese and English), 2026, 43(2): 223-237.

Numerical Simulation and Applications of Conforming and Non-Conforming Finite Elements in Plate Bending Problems

Li Zhe, Wu Bangmin, Yang Zekun

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: The study of plate problems plays a crucial role in understanding the load-bearing capacity, deformation, stability, and vibration behavior of plate structures. Mathematically, such problems are typically formulated as the solution of biharmonic equations. In this work, we perform numerical simulations for clamped and simply supported plates using both conforming and non-conforming finite elements on rectangular and triangular meshes. The conforming elements adopted include the Bogner-Fox-Schmit (BFS) element and the Argyris element, while the non-conforming elements consist of the Adini and Morley elements. Numerical results demonstrate that all employed elements achieve the theoretically optimal error convergence rates. Finally, the proposed methods are successfully applied to a practical plate problem, yielding efficient and accurate simulation results.

Key words: plate problems; biharmonic equations; conforming elements; non-conforming elements; numerical simulation

0 引言

板结构是工程领域中的基本承重构件之一,广泛应用于航空航天、土木建筑、机械制造与船舶工业等诸多

* 收稿日期: 2025-12-10; 修回日期: 2026-01-14; 录用日期: 2026-01-16.

基金项目: 新疆维吾尔自治区科技计划项目-自然科学基金-青年基金“磨损接触问题的虚拟元方法研究”(2024D01C227).

作者简介: 李哲(2001—),男,硕士生,从事偏微分方程数值解的研究,E-mail: lizhemath@163.com.

[†] 通信作者: 吴帮民(1990—),男,博士,副教授,主要从事偏微分方程数值解的研究,E-mail: bmwu_math@xju.edu.cn.

行业. 故对板结构力学行为实现高效而精确的数值模拟,始终是计算力学的核心课题. 自1850年Kirchhoff提出经典薄板理论的基本假设以来^[1],多种数值方法被相继提出并用于求解薄板弯曲问题. 2018年,Rafetseder等针对Kirchhoff板提出一种新颖的分解与离散策略^[2]. 同年,汤卓超等将广义有限差分法应用于Kirchhoff板与Winkler板的弯曲模拟^[3]. 2021年,黄钟民等探索了神经网络在薄板弯曲问题中的应用潜力^[4]. 但在众多数值方法中,有限元法因数学理论完善、计算过程可靠,常被用于板问题的研究.

有限元方法是一种用于求解偏微分方程的数值离散方法,最初形成于20世纪50年代,旨在处理工程中的基础结构力学问题. 至60年代中期,冯康等中国学者与西方科研团队分别独立为其建立了严格的数学理论框架,使其逐渐发展成为具备严密数学基础的通用数值计算工具. 有关有限元方法的系统介绍,可参阅专著[5-7]. 在板力学问题的数值模拟中,有限元法得到了长期且深入的应用. 1968年,de Veubeke首次提出一种协调三角形薄板弯曲单元^[8],但其数值精度较低. 次年,Bell通过改进单元构造方式,提出性能更优的Bell元^[9],显著提高了计算精度. 1982年,Batoz等基于离散Kirchhoff理论,成功构造了性能良好的四边形薄板单元^[10]. 此后,更多针对板问题的有限元格式被提出,推动该领域数值方法的持续发展. 在众多涌现的单元格式中,协调元(如BFS元、Argyris元)与非协调元(如Adini元、Morley元)因各自优势受到广泛关注,也成为本文后续数值研究的主要对象.

Adini元由Adini与Clough于1960年提出^[11],是最早用于板弯曲问题的非协调元之一. 该单元基于矩形网格,采用双三次多项式作为形函数,以节点位移和一阶导数为自由度. 与之相似,BFS元是1965年提出的一种协调元^[12],同样采用矩形单元与双三次插值,并通过构造保证单元间的 C^1 连续. 其特点在于插值格式更为完善,在应力集中区域仍可保持较高精度. Morley元由Morley于1968年提出^[13],是首个在理论上被证明对重调和方程收敛的非协调元. 该单元基于三角形划分,仅使用节点函数值和边上外法向导数作为自由度,形函数仅具 C^0 连续性,具有自由度少、网格适应性强等特点. 在其基础上发展的Argyris元是同期提出的协调元^[14],通过增加自由度和优化形函数构造,在保证 C^1 连续的同时,显著提升对高阶应力场的逼近能力.

分析上述4种有限元的发展历程,可得出以下两点结论:矩形元早于三角元出现,非协调元早于协调元得到应用. 早期有限元更注重实用性,矩形元便于网格生成,但难以适应复杂计算区域,因而后期发展了更具适应性的三角元;非协调元由于自由度少、计算量小,在早期受到青睐,但其精度有限,随后才发展出精度更高的协调元. 受早期计算机软硬件条件的限制,这些有限元方法难以大规模应用且鲜有数值算例能够完整呈现理论上的最优误差收敛阶. 其中Argyris元在每个单元上拥有多达21个自由度,且线性仿射映射难以构造,导致算法实现相当困难. 但随着计算技术的迅速发展,如今已具备足够的计算能力. 故本文采用上述4种有限元,对两类边界条件下的重调和方程进行数值模拟,并将其成功应用于固支板与简支板模型,验证了方法的收敛性,且均达到理论上的最优误差收敛阶.

本文的组织结构如下:第一部分介绍板弯曲模型及其变分形式,第二部分介绍4种求解重调和方程的有限元离散格式,第三部分运用上述数值格式对重调和方程进行模拟,并将其成功应用于板问题,第四部分对全文进行总结,对比分析所有限元方法的优劣,并对未来研究进行展望.

1 模型介绍

根据Kirchhoff薄板理论^[1],薄板控制微分方程为

$$D\Delta^2 w - q(x, y) = 0, \quad (1)$$

式中: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为薄板的弯曲刚度, E 为弹性模量, h 为厚度, ν 为泊松比; Δ^2 为重调和算子; w 为薄板的挠度; $q(x, y)$ 为作用于薄板上的横向分布荷载.

对式(1)进行变形,可得

$$\Delta^2 w = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (2)$$

即将板问题转化为重调和方程,一般形式为

$$\Delta^2 u = f. \quad (3)$$

本文研究固支与简支两类板模型,区别在于边界条件:固支板边界被视为完全固定,即位移与转角均为0;而简支板边界仅约束位移,允许自由转动,意味着其边界上的弯矩为0.接下来对重调和方程进行分析,分别给出两种模型及其变分形式.

模型 I (固支板模型)为

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = g_1, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 内,} \end{cases} \quad (4)$$

式中: \mathbf{n} 为所在边界的单位外法向量; f, g_1, g_2 为已知函数.

模型 II (简支板模型)为

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = g_1, \Delta u - (1 - \nu) \partial_{\tau\tau} u = g_3, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 内,} \end{cases} \quad (5)$$

式中: τ 为所在边界的单位切向量; f, g_1, g_3 为已知函数.

给出其变分形式前,先定义函数空间

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in H^2(\Omega) \mid v = g_1 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}, \\ V_2 &= \{v \in H^2(\Omega) \mid v = 0, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}, \\ V_3 &= \{v \in H^2(\Omega) \mid v = g_1 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}, \\ V_4 &= \{v \in H^2(\Omega) \mid v = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

模型 I 的变分形式:寻找 $u \in V_1$, 满足

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V_2. \quad (7)$$

模型 II 的变分形式:寻找 $u \in V_3$, 满足

$$a(u, v) = F(v) + \int_{\partial\Omega} g_3 \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} ds, \quad \forall v \in V_4, \quad (8)$$

这里

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} D^2 u : D^2 v + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) dx dy, \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v dx dy, \end{aligned} \quad (9)$$

式中: ν 为泊松比,满足 $-1 < \nu < 0.5$.

上述两类边界条件下,板模型变分形式解的存在性与唯一性问题已被证明,详见文献[5].

2 数值方法

本节介绍求解两类板问题模型的有限元离散格式.根据所用有限元类型,需对计算区域 Ω 采取相应的单元剖分:若使用BFS元或Adini元,则将 Ω 剖分为一族正则的矩形单元 $\{R^h\}_h$;若使用Argyris元或Morley元,则采用一族正则的三角形单元 $\{T^h\}_h$.记 z_i 为单元顶点、 m_i 为边的中点.

函数空间取为分片多项式空间 X_h ,具体形式依赖所选有限元.下文将依次介绍BFS元、Argyris元、Adini元及Morley元的构造与对应的空间 X_h .

2.1 BFS元

BFS元是协调的矩形元,形函数空间是双三次多项式空间(记为 $Q_3(R)$),自由度为

$$\mathcal{N} = \left\{ \phi(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial x}(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial y}(z_i), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(z_i) \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

其自由度个数为16,如图1所示,对应的分片多项式空间为 $X_h = \{v_h : v_h|_R \in Q_3(R), \forall R \in \{R^h\}_h\}$.详细的BFS元知识见文献[12].

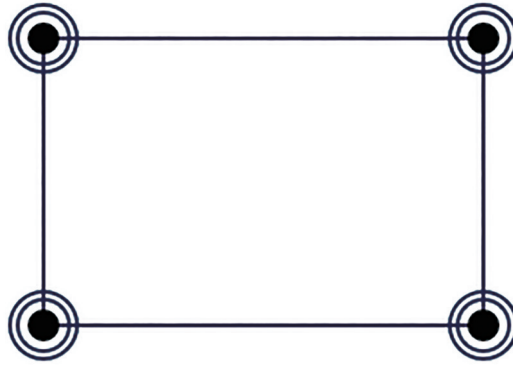


图 1 BFS 元
Figure 1 BFS element

2.2 Argyris 元

Argyris 元是协调的三角元,形函数空间是二元五次多项式空间(记为 $P_5(T)$),自由度为

$$\mathcal{N} = \left\{ \phi(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial x}(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial y}(z_i), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(z_i), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(z_i), \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(m_i) \right\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

其自由度个数为 21,如图 2 所示,对应的分片多项式空间为 $X_h = \{v_h : v_h|_T \in P_5(T), \forall T \in \{T^h\}_h\}$. 详细的 Argyris 元知识见文献[14].

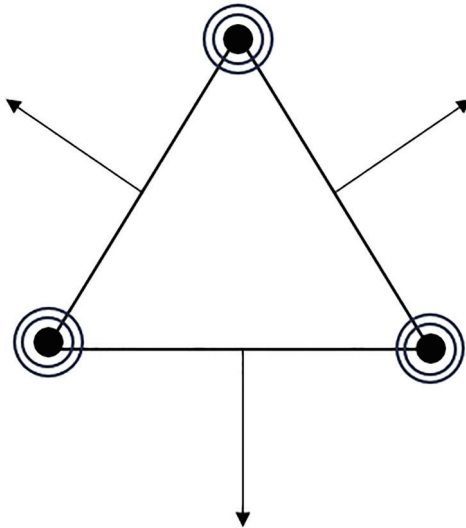


图 2 Argyris 元
Figure 2 Argyris element

2.3 Adini 元

Adini 元是非协调的矩形元,形函数空间是 $P_3(R) \oplus [x^3y, xy^3]$,自由度为

$$\mathcal{N} = \left\{ \phi(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial x}(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial y}(z_i) \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (12)$$

其自由度个数为 12,如图 3 所示,对应的分片多项式空间为 $X_h = \{v_h : v_h|_T \in P_3(R) \oplus [x^3y, xy^3], \forall R \in \{R^h\}_h\}$. 详细的 Adini 元知识见文献[11].

2.4 Morley 元

Morley 元是非协调的三角元,形函数空间是二元二次多项式空间(记为 $P_2(T)$),自由度为

$$\mathcal{N} = \left\{ \phi(z_i), \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(m_i) \right\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$



图3 Adini元
Figure 3 Adini element

其自由度个数为6,如图4所示,对应的分片多项式空间为 $X_h = \{v_h : v_h|_T \in P_2(T), \forall T \in \{T^h\}_h\}$. 详细的Morley元知识见文献[13].

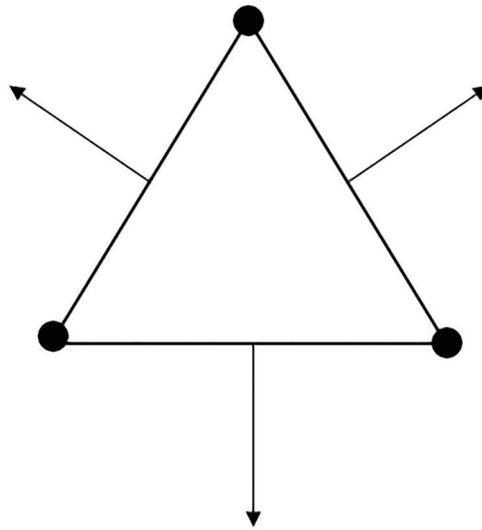


图4 Morley元
Figure 4 Morley element

但需注意,BFS元和Argyris元对应的分片多项式空间 X_h 为协调元空间,即 $X_h \subset H^2(\Omega)$; 而Adini元和Morley元对应的分片多项式空间 X_h 为非协调元空间,即 $X_h \not\subset H^2(\Omega)$.

变分形式(7)的有限元空间为

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{14}$$

其离散形式为寻找 $u_h \in V_h$, 使得

$$a_h(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{15}$$

变分形式(8)的有限元空间为

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{16}$$

其离散形式为寻找 $u_h \in V_h$, 使得

$$a_h(u_h, v_h) = F(v_h) + \int_{\partial\Omega} g_3 \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{n}} ds, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{17}$$

注释1 对于上述4种有限元,可从现有研究得出:BFS元的 H^2 半范数误差阶为 $2^{[15]}$; Argyris元的 L^2 误差阶为6, H^1 半范数误差阶为5, H^2 半范数误差阶为 $4^{[16]}$; Adini元的 H^2 半范数误差阶为 $2^{[6]}$; Morley元的 L^2 误差阶为2, H^1 半范数误差阶为2, H^2 半范数误差阶为 $1^{[17]}$.

3 数值模拟及应用

采用上述4种有限元方法,对重调和方程在固支边界与简支边界条件下的模型进行求解,并对一个实际板结构问题进行数值模拟.

3.1 数值算例

数值算例1 考虑正方形区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$,数值算例采用的解析解为

$$u(x, y) = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2. \quad (18)$$

该算例中,固支板模型采用齐次Dirichlet边界条件与齐次Neumann边界条件,简支板模型采用齐次Dirichlet边界条件与非齐次边界条件 $\Delta u - (1-\nu)\partial_{\tau\tau}u = g_3$. 模型中的右端项 $f(x, y)$ 与 $g_3(x, y)$ 均由解析解 $u(x, y)$ 代入模型I和模型II导出. 下面,给出数值算例1固支板和简支板模型的数值模拟结果.

3.1.1 数值算例1的固支板模型

根据表1~4所列结果,各单元在不同范数下的收敛阶归纳如下:BFS元的 L^∞ 范数、 L^2 范数、 H^1 半范数与 H^2 半范数误差的收敛阶分别为4、4、3与2;Argyris元对应收敛阶依次为6、6、5与4;Adini元在4种范数下收敛阶均为2;Morley元则分别为2、2、2与1. 图5、图6直观展示了上述收敛趋势,与注释1中的理论结果一致.

表1 BFS元计算的误差及收敛阶

Table 1 Errors and convergence orders of BFS element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	1.3287×10^{-4}	-	1.4109×10^{-4}	-	9.0469×10^{-4}	-	1.3148×10^{-2}	-
1/4	2.4900×10^{-5}	2.4158	1.1615×10^{-5}	3.6025	1.7759×10^{-4}	2.3489	4.4456×10^{-3}	1.5644
1/8	9.4882×10^{-7}	4.7139	4.4921×10^{-7}	4.6925	1.6120×10^{-5}	3.4616	9.6314×10^{-4}	2.2066
1/16	4.3992×10^{-8}	4.4308	2.9252×10^{-8}	3.9408	1.7776×10^{-6}	3.1808	2.1952×10^{-4}	2.1334
1/32	2.3362×10^{-9}	4.2350	1.9657×10^{-9}	3.8955	2.1013×10^{-7}	3.0806	5.2111×10^{-5}	2.0747
1/64	1.3341×10^{-10}	4.1302	1.2790×10^{-10}	3.9419	2.5542×10^{-8}	3.0403	1.2670×10^{-5}	2.0401
1/128	8.1444×10^{-12}	4.0340	8.1203×10^{-12}	3.9773	3.1477×10^{-9}	3.0205	3.1221×10^{-6}	2.0209
1/256	9.3458×10^{-13}	3.1234	4.8296×10^{-13}	4.0716	3.9063×10^{-10}	3.0104	7.7476×10^{-7}	2.0107

表2 Argyris元计算的误差及收敛阶

Table 2 Errors and convergence orders of Argyris element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	2.5425×10^{-4}	-	1.4795×10^{-4}	-	9.0116×10^{-4}	-	1.0092×10^{-2}	-
1/4	4.5484×10^{-6}	5.8048	2.4270×10^{-6}	5.9298	2.9691×10^{-5}	4.9237	8.2888×10^{-4}	3.6059
1/8	8.5278×10^{-8}	5.7370	3.0782×10^{-8}	6.3009	7.4697×10^{-7}	5.3128	4.7129×10^{-5}	4.1365
1/16	2.3362×10^{-9}	5.2119	9.3764×10^{-10}	5.0369	1.9790×10^{-8}	5.2382	2.5724×10^{-6}	4.1954
1/32	8.0547×10^{-11}	4.8362	1.7743×10^{-10}	2.4018	7.7763×10^{-10}	4.6695	1.4394×10^{-7}	4.1596
1/64	2.9422×10^{-10}	-1.8690	5.1661×10^{-9}	-4.8630	1.6551×10^{-8}	-4.4110	3.2479×10^{-7}	-1.1741

注释2 在本文数值模拟中,使用计算最大节点绝对值误差来近似 L^∞ 范数误差. 此外,使用BFS元计算固支板模型时,增加了对边界上 $\partial_\tau u$ 、 $\partial_{\tau\tau}u$ 的处理;使用Argyris元计算时,增加了对边界上 $\partial_\tau u$ 、 $\partial_{\tau\tau}u$ 、 $\partial_{\tau\tau\tau}u$ 的处理;其中 τ 为所在边界的单位切向量. 这些均可从边界条件 u 和 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 的信息中得出

$$\begin{aligned} \partial_\tau u &= \sum_{i=1}^2 \tau_i \partial_i u, \\ \partial_{\tau\tau} u &= \sum_{i,j=1}^2 n_i \tau_j \partial_{ij} u, \\ \partial_{\tau\tau\tau} u &= \sum_{i,j=1}^2 \tau_i \tau_j \partial_{ij} u. \end{aligned} \quad (19)$$

表3 Adini元计算的误差及收敛阶
Table 3 Errors and convergence orders of Adini element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	4.6296×10^{-4}	-	1.1359×10^{-4}	-	1.0377×10^{-3}	-	1.3851×10^{-2}	-
1/4	3.3141×10^{-4}	0.4822	1.2055×10^{-4}	-0.0858	6.8578×10^{-4}	0.5975	7.1752×10^{-3}	0.9488
1/8	9.3235×10^{-5}	1.8297	3.6437×10^{-5}	1.7262	1.8678×10^{-4}	1.8764	1.9643×10^{-3}	1.8690
1/16	2.3906×10^{-5}	1.9635	9.5307×10^{-6}	1.9348	4.7620×10^{-5}	1.9717	5.0186×10^{-4}	1.9686
1/32	6.0127×10^{-6}	1.9913	2.4093×10^{-6}	1.9840	1.1962×10^{-5}	1.9931	1.2614×10^{-4}	1.9922
1/64	1.5054×10^{-6}	1.9979	6.0398×10^{-7}	1.9960	2.9941×10^{-6}	1.9983	3.1578×10^{-5}	1.9981
1/128	3.7649×10^{-7}	1.9995	1.5110×10^{-7}	1.9990	7.4874×10^{-7}	1.9996	7.8971×10^{-6}	1.9995
1/256	9.4141×10^{-8}	1.9997	3.7785×10^{-8}	1.9996	1.8722×10^{-8}	1.9998	1.9745×10^{-6}	1.9999

表4 Morley元计算的误差及收敛阶
Table 4 Errors and convergence orders of Morley element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	9.0495×10^{-3}	-	3.4833×10^{-3}	-	1.1698×10^{-2}	-	7.1099×10^{-2}	-
1/4	3.0613×10^{-3}	1.5637	1.4294×10^{-3}	1.2851	4.5720×10^{-3}	1.3554	4.5705×10^{-2}	0.6374
1/8	8.4753×10^{-4}	1.8528	4.1905×10^{-4}	1.7702	1.3501×10^{-3}	1.7597	2.4866×10^{-2}	0.8781
1/16	2.1942×10^{-4}	1.9496	1.1021×10^{-4}	1.9269	3.5928×10^{-4}	1.9099	1.2765×10^{-2}	0.9619
1/32	5.5436×10^{-5}	1.9848	2.7958×10^{-5}	1.9789	9.1612×10^{-5}	1.9715	6.4291×10^{-3}	0.9894
1/64	1.3899×10^{-6}	1.9959	7.0166×10^{-6}	1.9944	2.3027×10^{-5}	1.9922	3.2206×10^{-3}	0.9972
1/128	3.4770×10^{-6}	1.9990	1.7559×10^{-6}	1.9986	5.7647×10^{-6}	1.9980	1.6111×10^{-3}	0.9993
1/256	8.6941×10^{-7}	1.9997	4.3907×10^{-7}	1.9996	1.4417×10^{-6}	1.9995	8.0564×10^{-4}	0.9998

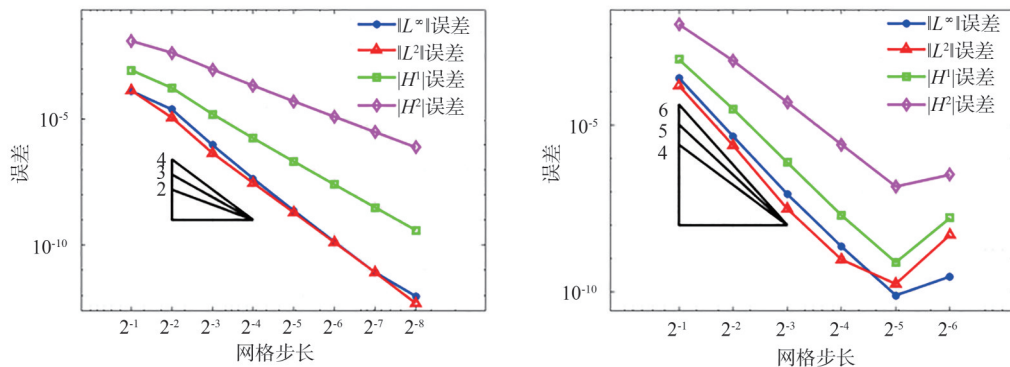


图5 协调元计算的误差与步长的关系(左:BFS元,右:Argyris元)

Figure 5 The relationship between the errors of conforming elements and the step sizes (left: BFS element, right: Argyris element)

注释3 Argyris元在每个单元上拥有21个自由度,使其在网格尺寸 $h = 1/64$ 时,计算误差很小.此时,机器的舍入误差会对计算结果产生显著影响,导致总体误差增大.故分析Argyris元的模拟结果时,只计算 h 从1/2到1/64的情形.

根据表5、图7、图8所示结果,在网格尺寸 $h = 1/32$ 的固支板模型计算中可以观察到:对于矩形元,BFS元与Adini元使用相同的单元数,但BFS元的自由度更高,其 L^∞ 范数误差的精度较Adini元高出约3个数量级,同时也需要更长的计算时间.对于三角元,Argyris元与Morley元单元数相同,但Argyris元凭借更高的自由度获

得更优的计算精度(其 L^∞ 范数误差更小),Morley元则在计算时间上更短.

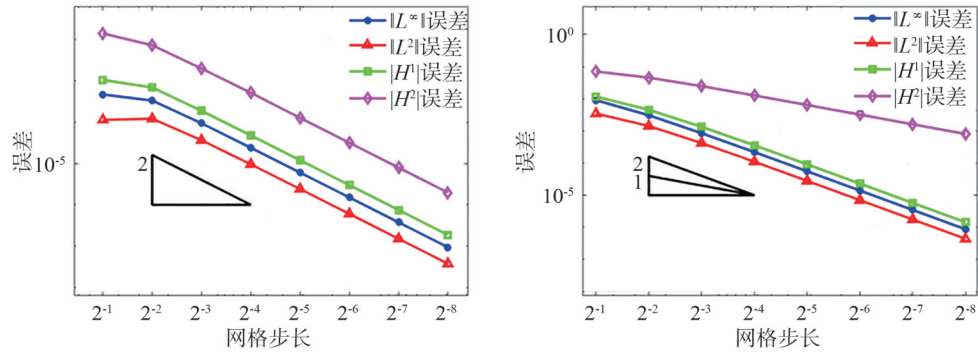


图 6 非协调元计算的误差与步长的关系(左:Adini元,右:Morley元)

Figure 6 The relationship between the errors of non-conforming elements and the step sizes (left: Adini element, right: Morley element)

表 5 在 $h = 1/32$ 下计算的单元数、自由度、计算时间及 L^∞ 范数误差

Table 5 Number of elements, degrees of freedom, computation time, and L^∞ norm errors ($h = 1/32$)

单元种类	单元数	自由度	计算时间/s	L^∞ 范数误差
BFS元	1 024	4 356	3.003 820	$2.336 2 \times 10^{-9}$
Argyris元	2 048	9 670	26.218 167	$8.054 7 \times 10^{-11}$
Adini元	1 024	3 267	1.369 318	$6.012 7 \times 10^{-6}$
Morley元	2 048	4 225	4.655 973	$5.543 6 \times 10^{-5}$

注:实验环境为11th Gen Intel (R) Core(TM) i9-11900K @ 3.50 GHz

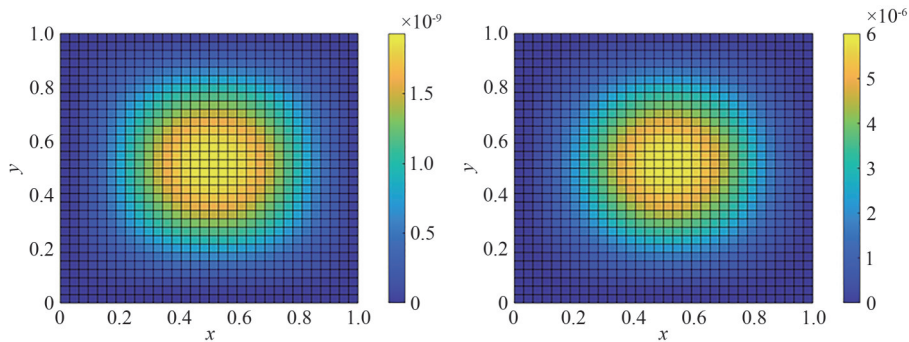


图 7 矩形元计算的节点绝对值误差(左:BFS元,右:Adini元)

Figure 7 Absolute nodal errors in rectangular elements (left: BFS element, right: Adini element)

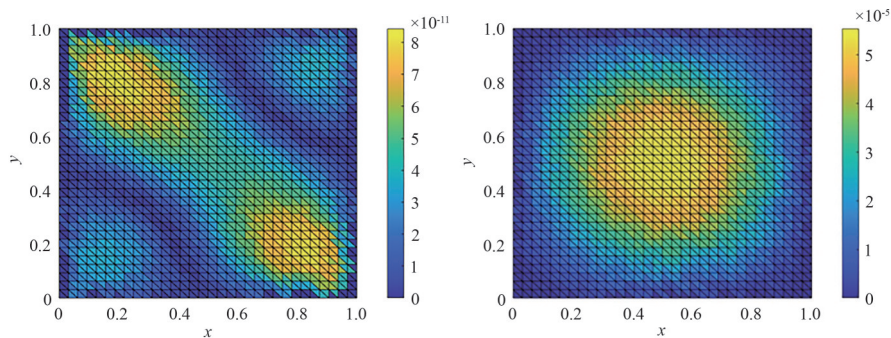


图 8 三角元计算的节点绝对值误差(左:Argyris元,右:Morley元)

Figure 8 Absolute nodal errors in triangular elements (left: Argyris element, right: Morley element)

3.1.2 数值算例1的简支板模型

由表6、表7可知,BFS元在 L^∞ 范数、 L^2 范数、 H^1 半范数和 H^2 半范数下的误差收敛阶依次为4、4、3和2;而Argyris元对应的收敛阶分别为6、6、5和4.该收敛趋势在图9中表现得更为直观,并与注释1中的理论结果一致.

表 6 BFS元计算的误差及收敛阶
Table 6 Errors and convergence orders of BFS element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	6.2224×10^{-4}	-	3.1545×10^{-4}	-	1.3675×10^{-3}	-	2.0426×10^{-2}	-
1/4	3.2123×10^{-5}	4.2758	1.3855×10^{-5}	4.5089	1.9468×10^{-4}	2.8124	4.9598×10^{-3}	2.0420
1/8	1.4940×10^{-6}	4.4263	5.2843×10^{-7}	4.7126	1.7681×10^{-5}	3.4608	1.0531×10^{-3}	2.2356
1/16	7.5676×10^{-8}	4.3032	2.6216×10^{-8}	4.3332	1.8831×10^{-6}	3.2310	2.3318×10^{-4}	2.1752
1/32	4.1623×10^{-9}	4.1844	1.5835×10^{-9}	4.0492	2.1706×10^{-7}	3.1169	5.3985×10^{-5}	2.1108
1/64	2.4175×10^{-10}	4.1058	1.0044×10^{-10}	3.9787	2.5992×10^{-8}	3.0620	1.2916×10^{-5}	2.0635
1/128	1.4276×10^{-11}	4.0818	6.4408×10^{-12}	3.9629	3.1764×10^{-9}	3.0326	3.1534×10^{-6}	2.0341
1/256	2.2298×10^{-12}	2.6786	6.1832×10^{-13}	3.3808	3.9245×10^{-10}	3.0168	7.7872×10^{-7}	2.0177

表 7 Argyris元计算的误差及收敛阶
Table 7 Errors and convergence orders of Argyris element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	2.5425×10^{-6}	-	1.4795×10^{-4}	-	9.0116×10^{-4}	-	1.0092×10^{-2}	-
1/4	4.5484×10^{-6}	5.8048	2.4270×10^{-6}	5.9298	2.9691×10^{-5}	4.9237	8.2888×10^{-4}	3.6059
1/8	8.5278×10^{-8}	5.7370	3.0782×10^{-8}	6.3009	7.4697×10^{-7}	5.3128	4.7129×10^{-5}	4.1365
1/16	2.3009×10^{-9}	5.2119	9.3762×10^{-10}	5.0370	1.9790×10^{-8}	5.2382	2.5724×10^{-6}	4.1954
1/32	8.0561×10^{-11}	4.8359	1.7743×10^{-10}	2.4017	7.7826×10^{-10}	4.6684	1.4399×10^{-7}	4.1591
1/64	2.9258×10^{-10}	-1.8600	5.1661×10^{-9}	-4.8600	1.6551×10^{-8}	-4.4100	3.2593×10^{-7}	-1.1786

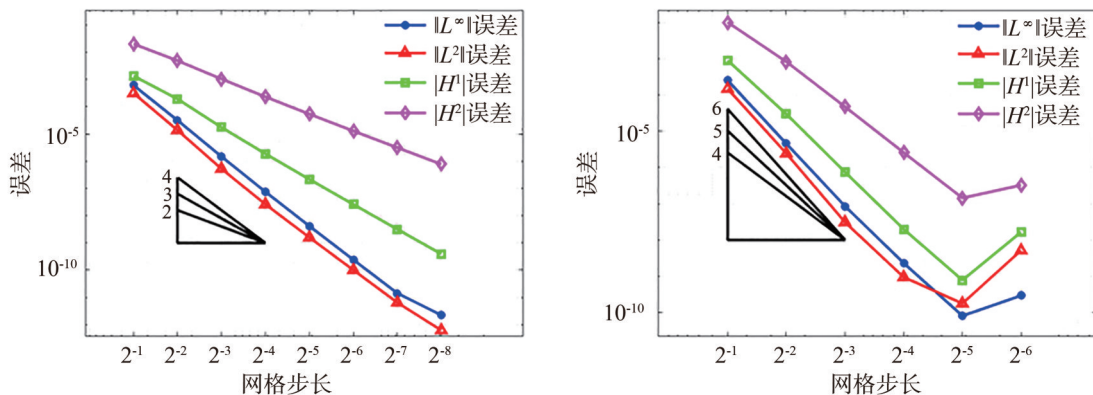


图 9 协调元计算的误差与步长的关系(左:BFS元,右:Argyris元)

Figure 9 The relationship between the errors of conforming elements and the step sizes (left: BFS element, right: Argyris element)

由表8、图10可知,在网格尺寸 $h = 1/32$ 的简支板模型中,使用Argyris元计算所需的单元数和自由度个数均高于BFS元.且Argyris元的 L^∞ 范数误差比BFS元高出两个数量级,取得了更优的计算精度,但BFS元在计算时间上消耗更少.

表 8 在 $h = 1/32$ 下计算的单元数、自由度、计算时间及 L^∞ 范数误差Table 8 Number of elements, degrees of freedom, computation time, and L^∞ norm errors ($h = 1/32$)

单元种类	单元数	自由度	计算时间/s	L^∞ 范数误差
BFS元	1 024	4 356	1.986 380	$4.162 3 \times 10^{-9}$
Argyris元	2 048	9 670	20.511 127	$8.056 1 \times 10^{-11}$

注:实验环境为 11th Gen Intel (R) Core (TM) i9-11900K @ 3.50 GHz

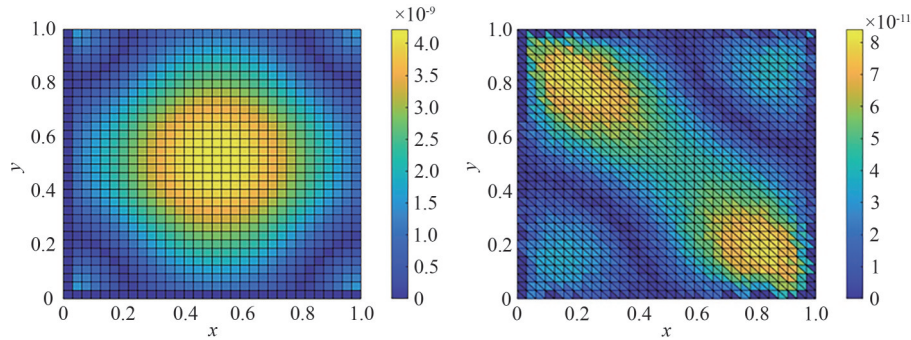


图 10 协调元计算的节点绝对值误差(左: BFS 元, 右: Argyris 元)

Figure 10 Absolute nodal errors in conforming elements (left: BFS element, right: Argyris element)

综上所述,4种有限元方法均能对重调和方程在固支与简支边界条件下的模型进行有效模拟,且均能达到注释1中的理论收敛阶。整体而言,协调元的计算精度高于非协调元,但非协调元所需的计算时间更短。接下来,将上述4种有限元方法应用于一个实际板问题,以检验其在实际背景下是否仍保持前述结果。

3.2 实际板问题

考虑矩形薄板区域 $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, 板的弯曲刚度为

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (20)$$

四边受单项正弦面荷载为

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (21)$$

该问题的解析解为

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (22)$$

选取具有实际工程意义的参数(SI制): $a = b = 1.0$ m, $h = 0.01$ m, $E = 210 \times 10^9$ Pa, $m = n = 1$, $\nu = 0.30$, $q_0 = 1\,000$ N/m².

经计算,可得真解 $u(x, y)$ (即 $w(x, y)$) 和右端项 f (即 $q(x, y)$) 为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1\,000}{76\,924\pi^4} \sin(\pi x) \sin(\pi y), & \text{单位: m,} \\ f(x, y) &= 1\,000 \sin(\pi x) \sin(\pi y), & \text{单位: N/m}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

在实际板问题中,固支板模型采用齐次 Dirichlet 条件与 Neumann 条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = g_2$, 简支板模型则采用齐次 Dirichlet 条件与非齐次边界条件 $\Delta u - (1-\nu)\partial_{rr}u = g_3$. 模型中的 g_2 与 g_3 均由解析解 $u(x, y)$ 代入模型 I 和模型 II 导出。下面,给出实际板问题的固支板和简支板模型的模拟结果。

3.2.1 实际板问题的固支板模型

由表 9~12 可知, BFS 元、Argyris 元、Adini 元和 Morley 元在实际工程中的固支板模型上均表现出良好的数值性能。图 11、图 12 则清晰表明,各单元在不同网格尺寸下均保持稳定的收敛趋势,且误差收敛阶与注释 1 中

的理论结果一致,验证了这些单元在实际板问题求解中的可靠性.

表 9 BFS 元计算的误差及收敛阶

Table 9 Errors and convergence orders of BFS element

h	$\ u - u_h\ _{L^r(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	$1.484 0 \times 10^{-7}$	-	$1.182 7 \times 10^{-6}$	-	$6.849 5 \times 10^{-6}$	-	$8.547 8 \times 10^{-5}$	-
1/4	$2.516 3 \times 10^{-7}$	-0.761 7	$1.467 2 \times 10^{-7}$	3.010 9	$2.032 4 \times 10^{-6}$	1.752 8	$4.595 2 \times 10^{-5}$	0.895 4
1/8	$8.364 8 \times 10^{-9}$	4.910 8	$5.191 2 \times 10^{-9}$	4.820 8	$1.809 4 \times 10^{-7}$	3.489 5	$9.888 4 \times 10^{-6}$	2.216 3
1/16	$2.912 5 \times 10^{-10}$	4.844 0	$2.464 2 \times 10^{-10}$	4.396 9	$1.724 4 \times 10^{-8}$	3.391 4	$2.044 5 \times 10^{-6}$	2.274 0
1/32	$1.280 2 \times 10^{-11}$	4.507 8	$1.546 6 \times 10^{-11}$	3.993 9	$1.780 1 \times 10^{-9}$	3.276 1	$4.358 0 \times 10^{-7}$	2.230 1
1/64	$6.806 8 \times 10^{-13}$	4.233 2	$9.942 7 \times 10^{-13}$	3.959 3	$1.968 2 \times 10^{-10}$	3.177 0	$9.738 1 \times 10^{-8}$	2.161 9
1/128	$3.274 8 \times 10^{-14}$	4.377 5	$6.710 4 \times 10^{-14}$	3.889 2	$2.289 3 \times 10^{-11}$	3.103 9	$2.271 0 \times 10^{-8}$	2.100 3

表 10 Argyris 元计算的误差及收敛阶

Table 10 Errors and convergence orders of Argyris element

h	$\ u - u_h\ _{L^r(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	$1.162 1 \times 10^{-6}$	-	$6.110 8 \times 10^{-7}$	-	$3.634 9 \times 10^{-6}$	-	$3.824 8 \times 10^{-5}$	-
1/4	$1.671 5 \times 10^{-8}$	6.119 4	$8.840 6 \times 10^{-9}$	6.111 1	$8.123 8 \times 10^{-8}$	5.483 6	$2.100 0 \times 10^{-6}$	4.186 9
1/8	$2.636 8 \times 10^{-10}$	5.986 2	$1.165 4 \times 10^{-10}$	6.245 2	$1.713 4 \times 10^{-9}$	5.567 2	$1.084 0 \times 10^{-7}$	4.276 0
1/16	$4.719 2 \times 10^{-12}$	5.804 1	$2.245 3 \times 10^{-12}$	5.697 8	$4.207 1 \times 10^{-11}$	5.347 9	$5.976 2 \times 10^{-9}$	4.181 0
1/32	$2.125 8 \times 10^{-13}$	4.472 5	$9.131 9 \times 10^{-12}$	-2.024 0	$2.669 2 \times 10^{-11}$	0.656 4	$5.586 8 \times 10^{-10}$	3.419 1
1/64	$5.982 0 \times 10^{-12}$	-4.814 5	$2.726 6 \times 10^{-10}$	-4.900 1	$8.255 0 \times 10^{-10}$	-4.950 0	$1.466 5 \times 10^{-8}$	-4.714 2

表 11 Adini 元计算的误差及收敛阶

Table 11 Errors and convergence orders of Adini element

h	$\ u - u_h\ _{L^r(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	$5.615 8 \times 10^{-6}$	-	$2.996 8 \times 10^{-6}$	-	$3.184 9 \times 10^{-5}$	-	$2.402 4 \times 10^{-4}$	-
1/4	$2.394 9 \times 10^{-6}$	1.225 8	$7.705 3 \times 10^{-7}$	1.959 5	$5.800 0 \times 10^{-6}$	2.437 2	$7.046 8 \times 10^{-5}$	1.756 4
1/8	$6.042 8 \times 10^{-7}$	1.986 7	$2.333 8 \times 10^{-7}$	1.720 4	$1.280 0 \times 10^{-6}$	2.199 8	$1.717 6 \times 10^{-5}$	2.036 5
1/16	$1.521 3 \times 10^{-7}$	1.989 9	$6.181 2 \times 10^{-8}$	1.919 5	$3.096 6 \times 10^{-7}$	2.047 1	$4.194 6 \times 10^{-6}$	2.033 8
1/32	$3.811 7 \times 10^{-8}$	1.996 8	$1.567 8 \times 10^{-8}$	1.979 2	$7.681 4 \times 10^{-8}$	2.011 3	$1.032 8 \times 10^{-6}$	2.022 0
1/64	$9.534 7 \times 10^{-9}$	1.999 2	$3.933 7 \times 10^{-9}$	1.994 8	$1.916 7 \times 10^{-8}$	2.002 8	$2.559 7 \times 10^{-7}$	2.012 5
1/128	$2.384 0 \times 10^{-9}$	1.999 8	$9.843 3 \times 10^{-10}$	1.998 7	$4.789 5 \times 10^{-9}$	2.000 7	$6.369 7 \times 10^{-8}$	2.006 7
1/256	$5.961 2 \times 10^{-10}$	1.999 7	$2.461 8 \times 10^{-10}$	1.999 4	$1.197 4 \times 10^{-9}$	1.999 9	$1.588 7 \times 10^{-8}$	2.003 4

表 12 Morley 元计算的误差及收敛阶

Table 12 Errors and convergence orders of Morley element

h	$\ u - u_h\ _{L^r(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	$9.226 8 \times 10^{-5}$	-	$3.308 1 \times 10^{-5}$	-	$1.168 6 \times 10^{-4}$	-	$7.818 4 \times 10^{-4}$	-
1/4	$2.977 8 \times 10^{-5}$	1.631 6	$1.379 9 \times 10^{-5}$	1.261 4	$4.180 5 \times 10^{-5}$	1.483 0	$4.652 5 \times 10^{-4}$	0.736 5
1/8	$7.937 3 \times 10^{-6}$	1.907 5	$3.925 8 \times 10^{-6}$	1.813 5	$1.159 3 \times 10^{-5}$	1.850 4	$2.482 1 \times 10^{-4}$	0.918 7
1/16	$2.017 8 \times 10^{-6}$	1.975 9	$1.014 3 \times 10^{-6}$	1.952 5	$2.979 9 \times 10^{-6}$	1.960 0	$1.259 6 \times 10^{-4}$	0.978 6
1/32	$5.066 1 \times 10^{-7}$	1.993 8	$2.557 0 \times 10^{-7}$	1.988 0	$7.503 2 \times 10^{-7}$	1.989 7	$6.321 5 \times 10^{-5}$	0.994 5
1/64	$1.267 9 \times 10^{-7}$	1.998 4	$6.405 9 \times 10^{-8}$	1.997 0	$1.879 2 \times 10^{-7}$	1.997 4	$3.163 7 \times 10^{-5}$	0.998 6
1/128	$3.170 6 \times 10^{-8}$	1.999 6	$1.602 3 \times 10^{-8}$	1.999 2	$4.700 1 \times 10^{-8}$	1.999 3	$1.582 2 \times 10^{-5}$	0.999 6
1/256	$7.925 5 \times 10^{-9}$	2.000 2	$4.005 7 \times 10^{-9}$	2.000 0	$1.175 0 \times 10^{-8}$	2.000 0	$7.911 7 \times 10^{-6}$	0.999 9

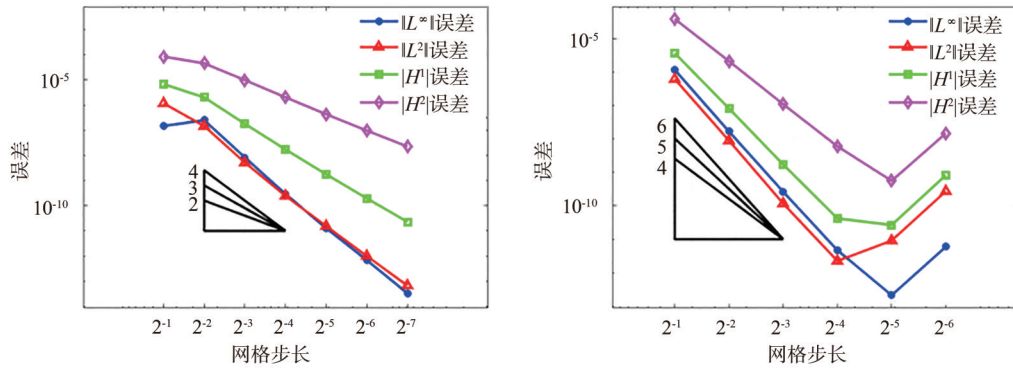


图 11 协调元计算的误差与步长的关系(左: BFS 元, 右: Argyris 元)

Figure 11 The relationship between the errors of conforming elements and the step sizes (left: BFS element, right: Argyris element)

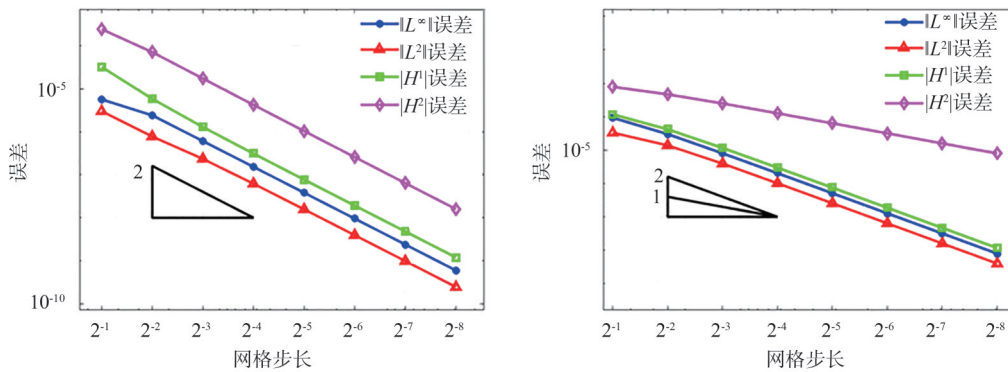


图 12 非协调元计算的误差与步长的关系(左: Adini 元, 右: Morley 元)

Figure 12 The relationship between the errors of non-conforming elements and the step sizes (left: Adini element, right: Morley element)

表 13 在 $h = 1/32$ 下计算的单元数、自由度、计算时间及 L^∞ 范数误差

Table 13 Number of elements, degrees of freedom, computation time, and L^∞ norm errors ($h = 1/32$)

单元种类	单元数	自由度	计算时间/s	L^∞ 范数误差
BFS 元	1 024	4 356	3.048 964	$1.280 2 \times 10^{-11}$
Argyris 元	2 048	9 670	26.017 036	$2.125 8 \times 10^{-13}$
Adini 元	1 024	3 267	1.369 007	$3.811 7 \times 10^{-8}$
Morley 元	2 048	4 225	4.960 791	$5.066 1 \times 10^{-7}$

注: 实验环境为 11th Gen Intel (R) Core (TM) i9-11900K @ 3.50 GHz

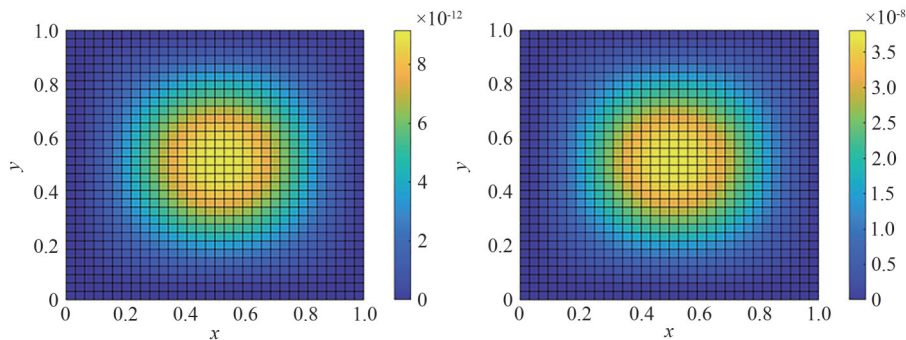


图 13 矩形元计算的节点绝对值误差(左: BFS 元, 右: Adini 元)

Figure 13 Absolute nodal errors in rectangular elements (left: BFS element, right: Adini element)

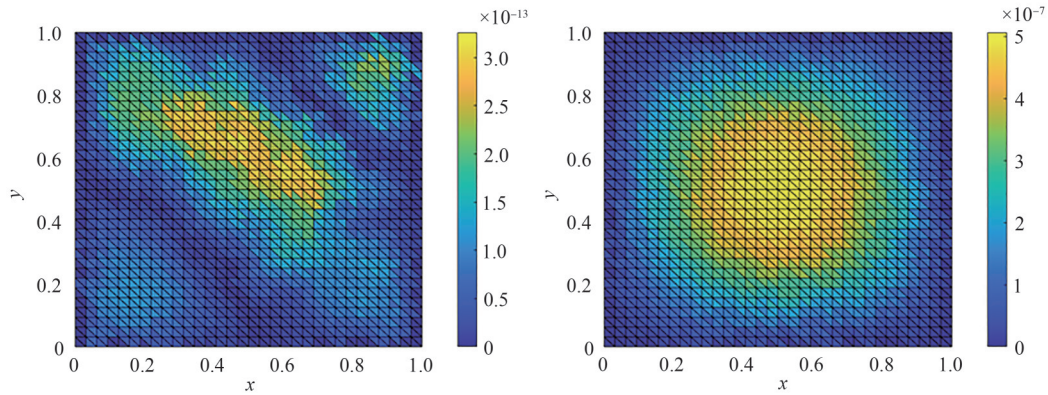


图 14 三角元计算的节点绝对值误差(左:Argyris 元,右:Morley 元)

Figure 14 Absolute nodal errors in triangular elements (left: Argyris element, right: Morley element)

结合表 13、图 13、图 14 可知,在实际固支板问题中,各类单元的表现与数值算例 1 的结果一致:对于矩形元,在单元数相同的条件下,BFS 元相比 Adini 元具有更高自由度,其 L^∞ 范数误差的计算精度提升约 3 个数量级,但相应的计算时间也更长. 对于三角元,在单元数相同的情况下,自由度更高的 Argyris 元 L^∞ 范数误差的计算精度,比 Morley 元高出 6 个数量级,而 Morley 元有着更短的计算时间.

3.2.2 实际板问题的简支板模型

由表 14、表 15 可知,BFS 元与 Argyris 元在实际简支板模型中也能实现有效的数值模拟. 图 15 则清晰表明,随着网格细化,二者的误差均呈稳定下降趋势,且收敛阶与注释 1 中的理论结果一致.

表 14 BFS 元计算的误差及收敛阶

Table 14 Errors and convergence orders of BFS element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	$9.151 0 \times 10^{-6}$	-	$7.423 5 \times 10^{-6}$	-	$2.712 0 \times 10^{-5}$	-	$3.719 0 \times 10^{-4}$	-
1/4	$3.998 4 \times 10^{-7}$	4.516 4	$2.481 1 \times 10^{-7}$	4.903 1	$2.444 7 \times 10^{-6}$	3.471 6	$7.416 5 \times 10^{-5}$	2.326 1
1/8	$1.644 3 \times 10^{-8}$	4.603 8	$8.102 6 \times 10^{-9}$	4.936 4	$2.225 4 \times 10^{-7}$	3.457 5	$1.418 5 \times 10^{-5}$	2.386 3
1/16	$7.226 5 \times 10^{-10}$	4.508 1	$2.778 9 \times 10^{-10}$	4.865 8	$2.116 7 \times 10^{-8}$	3.394 2	$2.711 8 \times 10^{-6}$	2.387 1
1/32	$3.548 3 \times 10^{-11}$	4.348 1	$1.189 5 \times 10^{-11}$	4.546 1	$2.107 6 \times 10^{-9}$	3.328 1	$5.364 4 \times 10^{-7}$	2.337 8
1/64	$1.922 0 \times 10^{-12}$	4.206 4	$6.542 4 \times 10^{-13}$	4.184 4	$2.215 9 \times 10^{-10}$	3.249 7	$1.118 8 \times 10^{-7}$	2.261 5
1/128	$2.672 8 \times 10^{-14}$	6.168 2	$7.891 2 \times 10^{-14}$	3.051 5	$2.463 4 \times 10^{-11}$	3.169 2	$2.470 0 \times 10^{-8}$	2.179 3

表 15 Argyris 元计算的误差及收敛阶

Table 15 Errors and convergence orders of Argyris element

h	$\ u - u_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	收敛阶	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	收敛阶
1/2	$1.162 1 \times 10^{-6}$	-	$6.110 8 \times 10^{-7}$	-	$3.634 0 \times 10^{-6}$	-	$3.824 8 \times 10^{-5}$	-
1/4	$1.671 5 \times 10^{-8}$	6.119 4	$8.840 6 \times 10^{-9}$	6.111 1	$8.123 8 \times 10^{-8}$	5.483 6	$2.100 0 \times 10^{-6}$	4.186 9
1/8	$2.636 8 \times 10^{-10}$	5.986 2	$1.165 4 \times 10^{-10}$	6.245 2	$1.713 4 \times 10^{-9}$	5.567 2	$1.084 0 \times 10^{-7}$	4.276 0
1/16	$4.719 2 \times 10^{-12}$	5.804 1	$2.246 0 \times 10^{-12}$	5.697 3	$4.207 2 \times 10^{-11}$	5.347 9	$5.976 2 \times 10^{-9}$	4.181 0
1/32	$2.508 6 \times 10^{-13}$	4.233 5	$9.131 9 \times 10^{-12}$	-2.023 5	$2.667 7 \times 10^{-11}$	0.657 2	$4.712 5 \times 10^{-10}$	3.664 7
1/64	$6.269 8 \times 10^{-12}$	-4.643 4	$2.726 6 \times 10^{-10}$	-4.900 1	$8.254 0 \times 10^{-10}$	-4.951 0	$1.069 3 \times 10^{-8}$	-4.504 1

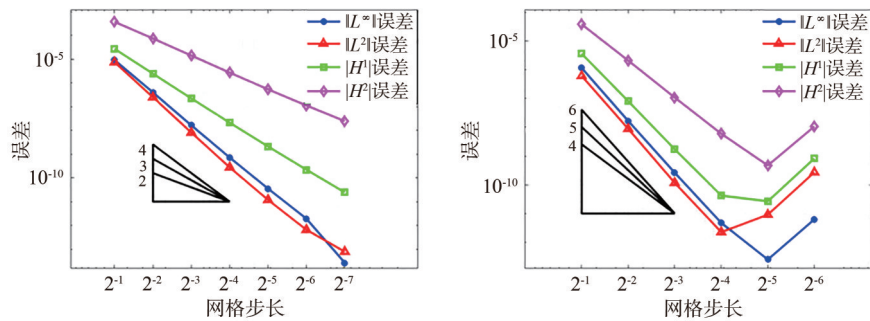


图 15 协调元计算的误差与步长的关系(左: BFS 元, 右: Argyris 元)

Figure 15 The relationship between the errors of conforming elements and the step sizes (left: BFS element, right: Argyris element)

由表 16、图 16 可知, 模拟 $h = 1/32$ 的实际简支板模型时, Argyris 元所用单元数与自由度数量均大于 BFS 元. Argyris 元在 L^∞ 范数误差的计算精度上优于 BFS 元, 而 BFS 元在计算时间方面更具优势.

表 16 在 $h = 1/32$ 下计算的单元数、自由度、计算时间及 L^∞ 范数误差Table 16 Number of elements, degrees of freedom, computation time, and L^∞ norm errors ($h = 1/32$)

单元种类	单元数	自由度	计算时间/s	L^∞ 范数误差
BFS 元	1 024	4 356	2.144 037	$3.548 3 \times 10^{-11}$
Argyris 元	2 048	9 670	20.771 673	$2.508 6 \times 10^{-13}$

注: 实验环境为 11th Gen Intel (R) Core (TM) i9-11900K @ 3.50 GHz

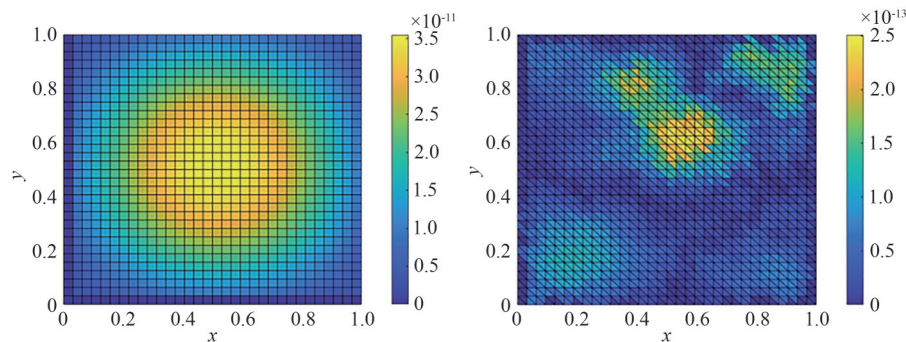


图 16 协调元计算的节点绝对值误差(左: BFS 元, 右: Argyris 元)

Figure 16 Absolute nodal errors in conforming elements (left: BFS element, right: Argyris element)

综上所述, 在实际板问题的数值模拟中, 4 种有限元方法均表现出良好的适用性. 其中: 协调元能够获得更高的计算精度, 但所需计算时间相对较长; 而非协调元在更细的网格上仍能维持稳定的收敛阶, 且计算时间较短.

4 总结与展望

通过板问题的数值模拟研究, 本文验证了 4 种有限元方法在固支板与简支板模型中的有效性. 计算结果表明: 求解重调和方程时, 所有方法均达到理论最优收敛阶, 并成功应用于实际板问题. 其中: 协调元(BFS 元、Argyris 元)具有较高的数值精度, 而非协调元(Adini 元、Morley 元)计算所需时间更少. 在工程应用中, 若追求高精度且不计时间成本, 可选用协调元; 若注重计算速度且接受适当精度损失, 则非协调元更为适宜.

后续工作将进一步运用上述方法, 求解几何形状复杂(如含孔洞、不规则边界)或物理条件复杂(如变厚度、非均匀材料)的板问题, 并对不同方法在计算精度、效率及稳定性等方面进行系统对比, 从而为工程实际应用提供更为全面和可靠的数值方法参考依据.

参考文献:

- [1] Reissner E. Reflections on the theory of elastic plates[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1985, 38(11):1453-1464.
- [2] Rafetseder K, Zulehner W. A decomposition result for Kirchhoff plate bending problems and a new discretization approach[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2018, 56(3):1961-1986.
- [3] 汤卓超,傅卓佳,范佳铭. 广义有限差分法求解 Kirchhoff 和 Winkler 薄板弯曲问题[J]. *固体力学学报*, 2018, 39(4):419-428.
Tang Z C, Fu Z J, Fan J M. Generalized finite difference method for solving Kirchhoff plate and Winkler plate bending problems[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2018, 39(4):419-428. (in Chinese)
- [4] 黄钟民,陈思亚,陈卫,等. 薄板弯曲问题的神经网络方法[J]. *固体力学学报*, 2021, 42(6):697-706.
Huang Z M, Chen S Y, Chen W, et al. Neural network method for thin plate bending problems[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2021, 42(6):697-706. (in Chinese)
- [5] Brenner S C, Scott L R. The mathematical theory of finite element methods[M]//Marsden J E, Sirovich L, Antman S S. *Texts in applied mathematics*. 3rd ed. New York:Springer, 2009.
- [6] 王烈衡,许学军. 有限元方法的数学基础[M]. 北京:科学出版社, 2004.
Wang L H, Xu X J. *Mathematical foundations of the finite element method*[M]. Beijing:Science Press, 2004. (in Chinese)
- [7] 李开泰,黄艾香,黄庆怀. 有限元方法及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2006.
Li K T, Huang A X, Huang Q H. *Finite element method and its applications*[M]. Beijing:Science Press, 2006. (in Chinese)
- [8] de Veubeke B F. A conforming finite element for plate bending[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1968, 4(1):95-108.
- [9] Bell K. A refined triangular plate bending finite element[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1969, 1(1):101-122.
- [10] Batoz J L, Tahar M B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1982, 18(11):1655-1677.
- [11] Rannacher R. Nonconforming finite element methods for eigenvalue problems in linear plate theory[J]. *Numerische Mathematik*, 1979, 33(1):23-42.
- [12] Bogner F K, Fox R L, Schmit L A. The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas[C/OL]//*Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, 1965:397-443. <https://digital2.library.iit.edu/files/original/bc582f2b8fd360a59d6631153f8fb836484e2744.pdf>.
- [13] Morley L S D. Triangular equilibrium element in solution of plate bending problems[J]. *Aeronautical Quarterly*, 1968, 19(2):149-169.
- [14] Argyris J H, Fried I, Scharpf D W. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method[J]. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 1968, 72(692):701-709.
- [15] 林甲富,林群. Bogner-Fox-Schmit 元的超收敛[J]. *计算数学*, 2004, 26(1):47-50.
Lin J F, Lin Q. Superconvergence for the Bogner-Fox-Schmit element[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2004, 26(1):47-50. (in Chinese)
- [16] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems[M]. Amsterdam:North-Holland, 1978.
- [17] 石钟慈. 关于 Morley 元的误差估计[J]. *计算数学*, 1990, 12(2):113-118.
Shi Z C. On the error estimates of Morley element[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 1990, 12(2):113-118. (in Chinese)

责任编辑:张自强